Travaux dirigés 5

Calcul integral

Exercice 1 :
Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 x(\sqrt{x}+1)\mathrm{d}x$
2) $\int_1^2 \frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x$
3) $\int_0^1 \frac{e^x}{3+e^x}\mathrm{d}x$
4) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x$
5) $\int_1^{\ln(2)} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x$
6) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$
7) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$
8) $\int_1^e \frac{1}{x+x\ln(x)}\mathrm{d}x$
9) $\int_0^\pi cosxsin^5x\mathrm{d}x$
10) $\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}t$
11) $\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)}\mathrm{d}x$
12) $\int_0^x te^{t^2}\mathrm{d}t$
13) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos(\frac{\pi}{3}-x)\mathrm{d}x$
14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3x\mathrm{d}x$
15) $\int_1^4 \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
16) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+x^2)\arctan(x)}\mathrm{d}x$
17) $\int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x\ln\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
18) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x+\tan^7 x\mathrm{d}x$
19) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1+\sin(2x)}\mathrm{d}x$
20) $\int_1^4 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
21) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x$
22) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$
23) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}\mathrm{d}x$
24) $\int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$
25) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$

Exercice 2 :
En utilisant la technique d'intégration par partie , Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1=\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x$; $I_2=\int_1^e \ln(x)\mathrm{d}x$; $I_3=\int_0^1 \arctan(x)\mathrm{d}x$; $I_4=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

2) $J_1=\int_0^\pi \cos(x)\sin(2x)\mathrm{d}x$; $J_2=\int_0^\pi e^x\cos(x)\mathrm{d}x$; $J_3=\int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))\mathrm{d}x$;
$J_4=\int_0^1 x^2e^x\mathrm{d}x$

Exercice 3 :
En utilisant un changement de variable , calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1=\int_2^3 \frac{\sqrt{1+x}}{2x}\mathrm{d}x$ *;on pose* $t=\sqrt{1+x}$; $I_2=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3}{x(1+x^3)}\mathrm{d}x$ *;on pose* $t=\frac{1}{x}$
$I_3=\int_2^5 \frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$ *;on pose* $t=\sqrt{x-1}$; $I_4=\int_1^e \frac{\ln(x)}{x(1+\ln(x))}\mathrm{d}x$ *;on pose* $t=\ln(x)$
$I_5=\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$ *;on pose* $t=2x+1$; $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos(x)}\mathrm{d}x$; *pose* $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

2) On utilisant un changement de variable convenable calculer :

$$J_1 = \int_2^3 \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x\ ;\quad J_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{sin^4(x)}\mathrm{d}x\ ;\quad J_3 = \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$J_4 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x\ ;\quad J_5 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\ ;\quad J_6 = \int_1^{\ln(2)} \sqrt{1+e^x}\mathrm{d}x$$

***Exercice* 4 :**

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1+2\sin(t)}\mathrm{d}t$ *et* $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{1+2\sin(t)}\mathrm{d}t$

Calculer I *et* $I+J$ *puis en déduire* J

***Exercice* 5 :**

1) Montrer que $(\forall x \in [0;1])$: $\dfrac{3}{x^3+1} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2x-1}{2(x^2-x+1)} + \dfrac{3}{2(x^2-x+1)}$

2) a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi+\sqrt{3}\ln(2)}{3\sqrt{3}}$

***Exercice* 6 :**

1) Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^1 x\arctan(x)\mathrm{d}x$

2) On pose $J = \displaystyle\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+e^x}\right) x\arctan(x)\mathrm{d}x$

a) Montrer que $J = \displaystyle\int_{-1}^1 \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) x\arctan(x)\mathrm{d}x$

b) En déduire que $2J = I$ *, puis calculer* I

***Exercice* 7 :**

1) Montrer que $2\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan(x)\mathrm{d}x$

***Exercice* 8 :**

Soit F *la fonction définie par :* $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t}{1-\ln(t)}\mathrm{d}t$

1) déterminer D_F

2) Montrer que F *est continue et dérivable sur chacun des intervalles de son domaine de définition , puis calculer* $F'(x)$

2) soit $G(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{t}{1-t^2}\mathrm{d}t$.

Étudier la parité de G

3) Soit K *la fonction définie par :* $K(x) = \displaystyle\int_{1+\cos^2(x)}^{2+\tan^2(x)} \frac{1}{\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t$

Montrer que K *est définie sur* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

***Exercice* 9 :**

Soit f *une fonction continue sur* $[-a;a]$ *avec* $a>0$

1) Montrer que si f *est paire alors* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

2) *Montrer que si f est impaire alors* $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$

3) *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique telle que T une période de f .*
Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x$

4) *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.*
Montrer que $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(a+b-x)\mathrm{d}x$

5) *En déduire* $I = \int_{-1}^{1} x^2 e^{x^2} tan(x)\mathrm{d}x$; $J = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$; $K = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tan(x))\mathrm{d}x$

***Exercice* 10 :**

Soit (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $: u_n = \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x$

1) *Montrer que (u_n) est croissante et convergente .*

2) *Soit la suite (v_n) définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $: v_n = \int_{0}^{1} \frac{nx^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$

   a) *Montrer que* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $v_n = \ln(2) - \int_{0}^{1} \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$

   b) *Montrer que* $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq \ln(1+t) \leq t$

   c) *En déduire que* $0 \leq \int_{0}^{1} \ln(1+x^n)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+1}$ *, puis en déduire* $\lim_{n\to+\infty} v_n$

3) *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} n(1-u_n)$

***Exercice* 11 :**

Calculer $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_{0}^{x} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$; $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}_-} \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(t)}\mathrm{d}t$; $\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{1} x^n \ln(x+1)\mathrm{d}x$

***Exercice* 12 :**

Soit F la fonction définie sur $]1, +\infty[$ *par :* $F(x) = \int_{x}^{x+1} e^{\frac{1}{\ln(t)}}\mathrm{d}t$

1) a) *Montrer que* $(\forall x > 1)$: $e^{\frac{1}{\ln(x+1)}} \leq F(x) \leq e^{\frac{1}{\ln(x)}}$

   b) *En déduire* $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

2) a) *Montrer que* $(\forall u \geq 0)$: $e^u \geq u+1$

   b) *En déduire que* $(\forall x > 1)$: $\int_{x}^{x+1} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t \leq F(x) - 1$

3) a) *Montrer que* $(\forall t > 0)$: $\ln(t) \leq t-1$

   b) *En déduire que* $(\forall t > 1)$: $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \leq \int_{x}^{x+1} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$, *puis calculer* $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

4) *Étudier les variations de F puis dresser son tableau de variation*

5) *Tracer la courbe de F dans un repère orthonormé* $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

***Exercice* 13 :**

On pose $I_0 = \int_{0}^{1} e^x\mathrm{d}x$ *et* $I_n = \int_{0}^{1} \frac{(1-x)^n e^x}{n!}\mathrm{d}x$

1) *Montrer que (I_n) est décroissante et positive et* $\lim_{+\infty} I_n = 0$

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{k=n}\dfrac{1}{k!}\right)$

***Exercice* 14** :

Partie I) : *On considère la fonction* f *définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1} & ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *, puis étudier la continuité en* 1

2) a) Montrer que pour tout $t \in]-1,+\infty[$ $\left|\displaystyle\int_0^t \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x\right| \leq t^2|\ln(1+t)|$

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^t \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}$

b) En déduire que f *est dérivable en* 1 *et calculer* $f'(1)$

3) Étudier les variations de f *puis dresser son tableau de variation*

Partie II) : *On considère la fonction définie sur* $[0,+\infty[$ *par :* $\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)dt & ; x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$.

1) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $\dfrac{2x\ln(x)}{x+1} \leq F(x) \leq x\ln(x)$

b) Étudier la continuité de F *à droite en* 0 *et calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

c) Étudier la dérivabilité de F *à droite en* 0

2) Pour tout $x \in]0,+\infty[$ *, on pose* $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

Calculer $F(x)$ *en fonction de* φ

3) a) Montrer que F *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et calculer* $F'(x)$

b) Étudier les variations de F *et dresser son tableau de variation*

4) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2(x)}{x} = 0$

b) Montrer que $(\forall x \in]1,+\infty[)$ $0 \leq F(x) \leq \ln(x)\ln(x+1)$ *et que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x} = 0$

5) Tracer la courbe de F *dans un repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ *; (On prend* $F\left(\dfrac{1}{3}\right) = -0,4$*)*

***Exercice* 15** :

1) Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$

2) Calculer la limite de la suite $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{n+k}{\sqrt{n}+\sqrt{k}}$

***Exercice* 16** :

Calculer la limite des suites suivantes :

$u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{n}{n^2+k^2}$; $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{n}cos^2\left(\frac{k}{n}\right)$; $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$; $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{n^2}e^{-\frac{k}{n}}$

***Exercice* 17** :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *, on pose* $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ *et* $v_n = \ln(u_n)$

1) a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$: $1 - x \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1$

b) *En déduire que* $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

2) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$; $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n} - \dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^2}\right) \leq v_n \leq \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}$

3) *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

***Exercice* 18** *: (Bac 2018)*

Soit F *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$

1) *Montrer que* F *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$

2) a) *Montrer que* $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $F(x) \geq x$ *puis en déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

b) *Montrer que* F *est impaire puis en déduire* $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

c) *Montrer que* F *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$

d) *Montrer que la fonction réciproque* G *de la fonction* F *est dérivable en* 0 *puis calculer* $G'(0)$

***Exercice* 19** *: (Bac 2014)*

On considère la fonction g *définie sur* $[0;=\infty[$ *par :* $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}; & x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$.

1) *Montrer que* g *est continue sur* $[0;+\infty[$

2) *Pour tout* $x \in [0;+\infty[$ *on pose* $L(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$

a) *Montrer que* L *est continue sur* $[0;+\infty[$

b) *Calculer* $L(x)$ *pour tout* $x > 0$

c) *Calculer* $\lim\limits_{x\to0^+} L(x)$ *; en déduire la valeur de* $L(0)$

3) *pour tout entier naturel supérieur ou égale à* 1 *on pose :* $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\dfrac{p}{n}\right)$

Montrer que la suite $(S_n)_{x\geq1}$ *est convergente puis calculer sa limite*

***Exercice* 20** *: (Bac 2017)*

Première partie *: on considère la fonction* f *définie sur* $[0;+\infty[$ *par :*

$$(\forall x \in]0,+\infty[) \qquad f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \quad \textbf{et} \quad f(0) = 0$$

et (C_f) *sa courbe dans un repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ *(On prend* $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 2cm$*)*

1) a) *Montrer que* f *est continue à droite en* 0

b) *Montrer que* f *est dérivable à droite on* 0

c) *Montrer que* f *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *; puis calculer* $f'(x)$ *pour tout* x *de l'intervalle* $]0;+\infty[$

2) a) *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *puis interpréter géométriquement ce résultat*

b) *dresser le tableau de variation de* f

3) a) *Montrer que la courbe* (C_f) *admet un point d'inflexion* I *que l'on déterminera*

b) *Tracer la courbe* (C_f) *. On prend :(* $f(1) \simeq 0,7$ *et* $4e^{-3} \simeq 0,2$ *)*

Deuxième partie *: On considère la fonction* F *définie sur* $[0,+\infty[$ *par :* $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$

1) *Montrer que F est continue sur* $[0;+\infty[$

2) a) *En utilisant la méthode de l'intégration par partie , montrer que :*

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \quad \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t$$

b) *Calculer* $\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t$ *; pour tout* $x \in]0;+\infty[$

c) *Montrer que :* $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = e^{-t}$

3) *Calculer en* (cm^2) *l'aire du domaine délimité par la courbe* (C_f) *et les droites d'équations* $x=0$, $x=2$ *et* $y=0$

4) *On considère la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *définie par :* $u_n = F(n) - F(n+2)$

a) *En utilisant le théorème des accroissements finis , montrer que pour tout entier naturel* n *, il existe un nombre réel* v_n *dans l'intervalle* $]n;n+1[$ *tel que :*

$$u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$$

b) *Montrer que* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\quad 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$

c) *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Troisième partie

1) a) *Montrer que pour tout entier naturel non nul* n *, il existe un nombre réel unique* a_n *strictement positif tel que :* $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$

b) *Montrer que la suite* $(a_n)_{n\geq 1}$ *est croissante*

c) *Montrer que* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\quad \frac{-1}{a_n} + \ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = \frac{-1}{n}$

2) a) *Montrer que* $(\forall t \in [0;+\infty[)$ $\quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$

b) *Montrer que* $(\forall x \in [0;+\infty[)$ $\quad \frac{-x^2}{2} \leq -x+\ln(1+x) \leq \frac{-x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

3) *Soit* n *un entier naturel supérieur ou égal à* 4

a) *Montrer que* $a_4 \geq 1$ *puis en déduire que* $a_n \geq 1$ *;* *(On admet que* $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$ *)*

b) *Montrer que :* $1-\frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$ *; (Vous pouvez utiliser les questions 1)c) et 2)b) de la troisième partie)*

c) *Montrer que :* $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n$ *(vous pouvez utiliser les questions 3)a) et 3)b)) ; puis en déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

d) *Déterminer :* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$